CONCOURS D'ADMISSION A L'ESM DE SAINT-CYR EN 1994

•

MATHÉMATIQUES II

Durée : 4 heures

Options M, P

Soit E un espace euclidien de dimension n sur $\mathbb{R}$ $(n \geq 2)$.

On note $x \,.\, y$ le produit scalaire des vecteurs x et y.

Une application u de E dans E est dite antisymétrique si et seulement si

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad x.u(y) + y.u(x) = 0 .$$

On notera A (E) l'ensemble des applications antisymétriques de E.

I.1) Soit u une application antisymétrique.

a) Pour $(x, y, z) \in E^3$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ calculer $z.u(\alpha.x + \beta.y)$.

b) Montrer que u est linéaire.

2) Montrer l'équivalence des trois propriétés suivantes pour une application u quelconque de E dans E :

(1) u est linéaire et $\forall x \in E$, $u(x) \,.\, x = 0$,

(2) u est antisymétrique,

(3) u est linéaire et sa matrice dans une base orthonormée est antisymétrique.

3) Montrer que A(E) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et déterminer sa dimension.

4) Soit u une application antisymétrique.

a) Soit a une valeur propre réelle de u. Déterminer la valeur de a. Qu'en déduit-on si n est impair ?

b) Montrer que $Im\, u$ est l'orthogonal de $Ker\, u$.

c) Étudier la restriction de u à $Im\, u$. En déduire que le rang de u est pair.

d) Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, son orthogonal est stable par u.

II) Étude du cas particulier $n = 3$.

Dans le cas $n = 3$ montrer que pour tout élément u de A(E) il existe une base orthonormée dans laquelle u a pour matrice :

$$\begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{avec } a \in \mathbb{R} .$$

Si de plus E est orienté montrer qu'il existe un unique vecteur b tel que $\forall x \in E$, $u(x) = b \wedge x$.

III) Étude du cas particulier $n = 4$.

Dans toute cette partie E est un espace euclidien de dimension 4 et u une application antisymétrique de E.

1) On suppose que u est de rang 2. Montrer qu'il existe une base de E orthonormée dans laquelle la matrice de u est :

$$\begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad a \in \mathbb{R}$$

Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de u^2.

2) On suppose que u est de rang 4.

a) Montrer que u^2 est diagonalisable et n'a que des valeurs propres strictement négatives.

b) Soit x un vecteur propre de u^2 associé à la valeur propre λ. Montrer que $(x, u(x))$ engendre un plan vectoriel stable par u.

c) En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est :

$$\begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & -b & 0 \end{bmatrix} \quad \text{avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

3) Application :

On considère la matrice U définie par :

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Déterminer la fonction V de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^4$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \frac{d}{dt} V(t) = U.V(t) \quad \text{et} \quad V(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

IV) Retour au cas général

Dans cette partie n est un entier naturel quelconque ≥ 2 et u une application antisymétrique de E.

1) Montrer que u^2 est diagonalisable. Que peut-on dire des valeurs propres de u^2 ?

2) Montrer l'égalité de $Ker\ u$ et $Ker\ u^2$.

3) Soit λ une valeur propre non nulle de u^2 et E_λ le sous-espace propre associé. Montrer que E_λ est nécessairement de dimension paire.

4) En déduire qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, les blocs non nuls situés sur la diagonale étant de la forme $\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$.

5) *a*) Montrer que si id désigne l'application identique sur E, pour tout λ réel non nul, $u + \lambda\, id$ est un automorphisme de E.

b) Montrer que pour tout λ réel non nul $r = (-u + \lambda\, id) \circ (u + \lambda\, id)^{-1}$ est une rotation de E qui n'admet pas la valeur propre -1.

c) On suppose que $n = 3$, que E est orienté et que la matrice de u dans une base orthonormée directe de E est :

$$u = \begin{bmatrix} 0 & \tan\theta & 0 \\ -\tan\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{avec } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

Déterminer l'axe et l'angle de $r = (-u + id) \circ (u + id)^{-1}$.

6) Soit f une rotation de E qui n'admet pas la valeur propre -1. Montrer qu'il existe $u \in A(E)$ telle que :

$$f = (-u + id) \circ (u + id)^{-1}$$